Ecole Normale Supérieure, DMA

Examen d'Analyse complexe du 29 mai 2017. Durée: 3h

L'utilisation de documents, du téléphone portable, ou d'une calculatrice est interdite.

Exercice 1 (Questions diverses) :

(1) Déterminer le produit de Hadamard de la fonction $\cos(\pi z)$.

(2) Combien de zéros la fonction polynomiale $P(z) = z^4+6z+3$ a-t-elle dans $\{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < 2\}$?

(3) Soit $a > 0$. Montrer que $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\log(x)}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2a}\log(a)$.
(On pourra considérer le bord du domaine $\{\Im(z) \geq 0\} \cap \{\epsilon < |z| < R\}$ pour $0 < \epsilon < R$).

Exercice 2 (Construction d'une fonction entière non polynomiale et d'ordre 0) :

(1) Soit $\rho \in]0, \infty[$ et $N \in \mathbb{N}^*$. On pose $R_N = (Ne)^{1/\rho}$ et $u_n = n\log(R_N) - n\log(n)/\rho$ pour $n \geq 1$.

Vérifier que $\max_{n\geq 1} u_n$ est atteint en $n = N$ et que si $N \geq 2$ et $n > N^2$ on a

$$u_n - u_N \leq -n\frac{\log(N)}{\rho}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\log(N)}\right).$$

Montrer alors que dès que N est suffisamment grand, on a $\sum_{n\geq 1}\exp(u_n) \leq (N^2+2)\exp(u_N)$.

(2) Soit $f(z) = \sum_{n=0}^\infty a_n z^n$ une fonction entière dont l'ordre de croissance ρ_f est fini. On pose

$$\widetilde{\rho}_f := \inf\{\rho > 0 : \sup_{n\geq 1} |a_n|\, n^{n/\rho} < +\infty\}.$$

(a) Montrer que $\rho_f \leq \widetilde{\rho}_f$. (Si $\rho > \widetilde{\rho}_f$, on estimera $|f(z)|$ pour $|z| = R_N$, avec R_N défini comme en (1)).

En déduire la construction d'une fonction entière non polynomiale et d'ordre 0.

(b) Montrer qu'on a aussi $\rho_f \geq \widetilde{\rho}_f$.

Problème (la preuve de Koebe du théorème de représentation conforme) :

Dans tout le problème, si $a \in \mathbb{C}$ et $R > 0$ on note $D(a,R)$ (resp. $\overline{D}(a,R)$) le disque ouvert (resp. fermé) centré en a de rayon R. Lorsque $a = 0$ et $R = 1$, on écrira simplement D et $\overline{D}$.

(1) (a) Soit $h : \overline{D}(a,R) \to \mathbb{R}$ une fonction continue positive, harmonique en restriction à $D(a,R)$. On rappelle que pour tous $0 \leq r < R$ et $\theta \in [0, 2\pi]$ on a la formule de Poisson:

$$h(a+re^{i\theta}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{R^2-r^2}{R^2-2rR\cos(\theta-t)+r^2}\, h(a+Re^{it})\,\mathrm{d}t.$$

Montrer que

$$\frac{R-r}{R+r}h(a) \leq h(a+re^{i\theta}) \leq \frac{R+r}{R-r}h(a).$$

(b) Soit U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$ et $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite *croissante* de fonctions harmoniques sur U. Démontrer que soit $\lim_{n\to+\infty} h_n(z) = +\infty$ pour tout $z \in U$, soit $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur les compacts de U vers une fonction harmonique.

(c) Soit U un ouvert connexe de $\mathbb{C}$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $H(U)$. On suppose qu'il existe $a \in U$ tel que la suite $(f_n(a))_{n\in\mathbb{N}}$ converge. On suppose également que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $z \in U$,

$$\mathrm{Re}(f_n(z)) \leq \mathrm{Re}(f_{n+1}(z)). \tag{1}$$

Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur les compacts de U vers une fonction holomorphe sur U.

(On pourra utiliser l'inégalité de Borel-Carathéodory vue en cours : si $g \in H(D(0,R))$,

$$\sup_{|z|=r} |g(z)| \leq \frac{2r}{R-r} \sup_{|z|=R} \mathrm{Re}(g(z)) + \frac{R+r}{R-r}|g(0)|,$$

pour tous $0 \leq r < R$.)

(d) On conserve les notations de la question précédente. Montrer que la même conclusion vaut si l'on remplace l'hypothèse (1) par l'hypothèse que U est simplement connexe et que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $z \in U$,

$$0 < |f_n(z)| \leq |f_{n+1}(z)|.$$

(2) Le but de cette deuxième partie est d'aboutir à une démonstration alternative (due à Koebe) du théorème de représentation conforme de Riemann pour un ouvert simplement connexe U *que l'on suppose contenir* 0 *et être strictement inclus dans* D. Pour ce faire, on va avoir besoin de construire par récurrence une suite d'ouverts U_n simplement connexes contenant 0 et de fonctions $g_n \in H(U_{n-1})$ telles que $g_n(U_{n-1}) = U_n$.

(a) (*Question de cours*) Soit $\alpha \in D$. Montrer que la fonction

$$\varphi_\alpha : z \mapsto \frac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha}z}$$

est une bijection de $\overline{D}$ sur $\overline{D}$, envoyant D sur lui-même et le cercle unité sur lui-même, holomorphe sur D ; déterminer sa bijection réciproque.

(b) Soit $n \geq 1$. On suppose U_{n-1} construit. Justifier l'existence de $r_n > 0$ maximal, tel que $D(0,r_n) \subset U_{n-1}$ et de a_n appartenant au bord de U_{n-1} tel que $|a_n| = r_n$. On choisit $b_n \in D$ tel que $b_n^2 = -a_n$ et on note

$$F_n = \varphi_{-a_n} \circ s \circ \varphi_{-b_n},$$

s étant la fonction $z \mapsto z^2$. Montrer qu'il existe un ouvert $\Omega_{n-1} \subset D$ sur lequel la restriction de F_n admet une bijection réciproque $G_n \in H(U_{n-1})$ telle que $G_n(0) = 0$.

(c) On définit :

$$g_n = \frac{|G_n'(0)|}{G_n'(0)} \cdot G_n.$$

Justifier que cette définition a un sens et montrer que $g_n'(0) = \dfrac{1+r_n}{2\sqrt{r_n}}$.

(d) On pose $U_0 = U$, $\psi_0 = \mathrm{Id}$ puis on définit par récurrence pour $n \geq 1$, $\psi_n = g_n \circ \psi_{n-1} \in H(U)$ et $U_n = \psi_n(U)$. Montrer que pour tout n, ψ_n est une bijection holomorphe de U sur U_n. Montrer que la suite $(\psi_n'(0))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée. En déduire qu'elle converge et que $r_n \to 1$ quand $n \to +\infty$.

(e) Montrer qu'il existe, pour tout n, $f_n \in H(U)$ telle que $\psi_n(z) = zf_n(z)$ pour tout $z \in U$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $z \in U$,

$$0 < |f_n(z)| \leq |f_{n+1}(z)|$$

et en déduire, à l'aide de la question (1)(d), que la suite $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers une bijection holomorphe de U sur D.

Exercice (Bonus – à n'aborder que si vous avez fait tout ce qui précède) : Montrer qu'une fonction entière injective est affine.